Subject :

Date : فصل ۴

همسایگی: بازه باز I را یک همسایگی عدد a می‌نامیم اگر $a \in I$ باشد.

* هر بازه‌ای همسایگی بیشمار عدد است * هر عدد بی‌شمار همسایگی دارد.

همسایگی متقارن a: بازه‌ی $(a-\delta , a+\delta)$ را همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع δ می‌نامیم.

$$(a-\delta , a+\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} \to \{x \mid -\delta < x-a < \delta\} \to \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

* به طور کلی بازه ~~[illegible]~~ (a , b) همسایگی متقارن به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و به شعاع $\frac{b-a}{2}$ است.

* مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x+5}{x+3} < 0$ همسایگی متقارن چه عددی است؟

	-5		3	
$x+5$	+	−		+
$x-3$		ج		

$(-5 , 3)$ $\quad \frac{-5+3}{2} = -1$ مرکز $\quad$ شعاع 4

* همسایگی متقارن محذوف a: $(a-\delta , a+\delta) - \{a\}$

$$\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} - \{a\} \to \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} \to \frac{1}{|x-a|} > \frac{1}{\delta}$$

* تابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ در همسایگی متقارن چه عددی تعریف شده است؟

$[-2 , 2]$ $\quad$ مرکز $= 0$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$D_f = [-2 , 2] - \{0\}$

همسایگی راست a: بازه $(a, a+\delta)$ را همسایگی راست a می‌گوییم.

تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ در همسایگی راست ۱ تعریف شده است.

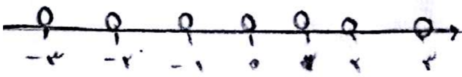
همسایگی چپ a: بازه $(a-\delta, a)$ را همسایگی چپ a می‌نامیم.

تابع $\sqrt{1-x}$ در همسایگی چپ عدد ۱ تعریف شده است.

تمرین در کلاس ۱۴۲ $x-[x]=0 \to x=[x]$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$ $9-x^2\geq 0 \to [-3,3]$ $D_f=[-3,3]-\mathbb{Z}$

۱- تمام اعداد غیر صحیح واقع در بازه (۳- , ۳)



۲- {۲ , ۱ , ۰ , ۱- , ۲-}

۳- {۳} ۴- {۳-}

* نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که فاصله‌اش از ۵ برابر ۷ باشد. $|x-5|=7$

$x-5=\pm 7 \to 12,\ -2$

میل کردن: x به عدد a میل می‌کند $(x\to a)$ اگر فاصله x از a از هر عدد مثبت بسیار کوچکی، کمتر باشد.

$|x-a|<\delta$

x از مقادیر بیشتر به a میل کند $(x\to a^+)$ یعنی $x>a$

x از مقادیر کمتر به a میل کند $(x\to a^-)$ یعنی $x<a$

x	$1.9\to 1.99\to 1.999$	2	$2.01\leftarrow 2.1$
	$x\to 2^-$		$x\to 2^+$

Subject: ______ Date: ۱۴۰۰ - ۹ - ۲

تابع $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}$ آیا x به عدد ۱ میل می‌کند؟ بله. آیا x به عدد $-\frac{3}{2}$ میل می‌کند؟ خیر. آیا x به عدد ۲- ؟

$x \to 1$

x		-2		-1	
	$+$	0	$-$	0	$+$

میل می‌کند: ۱ ، ۲- ؟

$x \to 1^+$ $\quad$ $x \to -2^-$

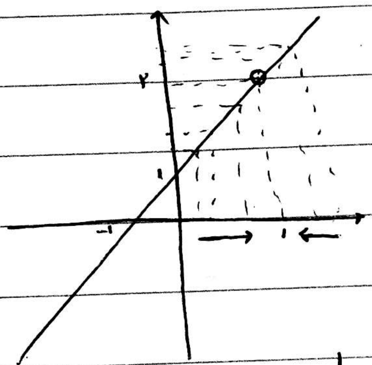
در تابع $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$ آیا x به عدد ۳ میل می‌کند. خیر

$D_f=\{3\}$

در تابع $\frac{x+5}{[x]+2}$ آیا x به عدد ۲- میل می‌کند؟

$x \to -2^-$

با توجه به جدول حد تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ را در نقطه به طول ۱ بررسی کنید؟



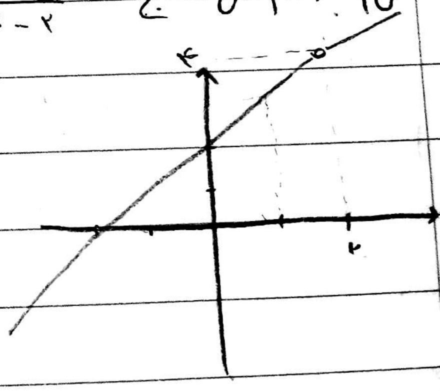
$\lim_{x\to 1} f(x)=2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=2$

$\frac{x^2-1}{x-1} \to \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

x	0.9, 0.99, 0.999 ...	1	1.1, 1.01, 1.001, 1.0001 ...
$f(x)$	1.9, 1.99, 1.999 ...	2	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001 ...

مثال) با رسم شکل تابع $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ حد تابع را وقتی که x به ۲ میل می‌کند بررسی کنید.



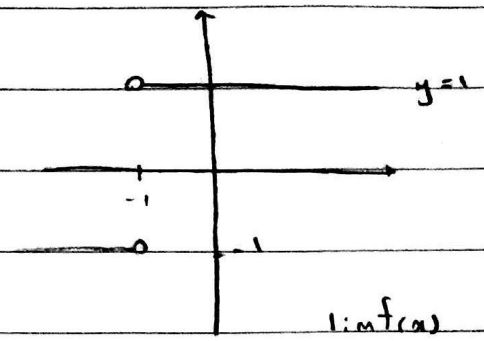
$y=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} \to y=x+2 \quad x\neq 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=4$

$\lim_{x\to 2} f(x)=4$

مثال) نمودار تابع $y=\frac{|x+1|}{x+1}$ را رسم کرده، حد تابع را وقتی که $x \to -1$ بررسی کنید.

$$y=\begin{cases} 1 & x+1>0 \\ -1 & x+1<0 \end{cases}$$



$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ ‎ ‎ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$ ‎ ‎ $\lim_{x\to -1} f(x) =$ موجود نیست

* $x \to a$ یعنی $x \neq a$ و $x \to a^+$ یعنی $x>a$ و $x \to a^-$ یعنی $x<a$

نکته: برای تعیین حد تابع از نقاط $x \neq a$ استفاده می‌کنیم
برای تعیین حد راست تابع از نقاط $x>a$ استفاده می‌کنیم
برای تعیین حد چپ تابع از نقاط $x<a$ استفاده می‌کنیم.

مثال) حد تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2-4} & x\neq 3 \\ 5 & x=3 \end{cases}$ در نقطه $x=3$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{3^2+1}{3^2-4} = \frac{10}{5} = 2$$

مثال) تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x>1 \\ 11 & x=1 \\ 5x-8 & x<1 \end{cases}$ مفروض است حد $f(x)$ وقتی $x\to 1$ را بررسی کنید.

$$\begin{aligned} 1-4&=-3 \\ 5-8&=-3 \end{aligned} \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -3}$$

مثال) حد تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x>2 \\ 2x-3 & x<2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$\begin{aligned} 4-2&=2 \\ 4-3&=1 \end{aligned} \longrightarrow \lim f(x) =$$ موجود نیست

Subject : ______________ Date : ______________

مثال) حد تابع $f_{(x)} = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ را وقتی $x \to 2$ بررسی کنید.

$D_f = \{2\}$ در مورد حد نمی‌توان بحث کرد.

* شرط اینکه بتوانیم در مورد حد تابع f در $x=a$ بحث کنیم آن است که $x \to a$

مثال) حد $\lim_{x \to 5} [x]$ را بررسی کنید ✗

$\lim_{x \to 5^+} [x] = 5 \qquad \lim_{x \to 5^-} [x] = 4$

نکته) $n \in Z$: $\lim_{x \to n^+} [x] = n$ ، $\lim_{x \to n^-} [x] = n-1$ ⟸ $\lim_{x \to n} [x] =$ ندارد

$n \notin Z$: $\lim_{x \to n} [x] = [n]$

مثال)

$\lim_{x \to \sqrt{5}} [x] = 2 \qquad \lim_{x \to -7} [x] =$ موجود نیست

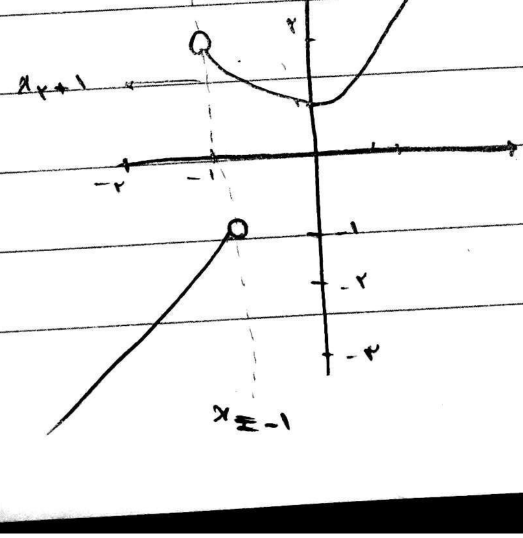
مثال)

$\lim_{x \to 7} ([x] + [-x]) = -1$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

نکته) $\lim_{x \to a} ([x] + [-x] + k) = k-1 \qquad a \in IR$

* با توجه به نمودار تابع $f_{(x)} = \begin{cases} x^2+1 & x > -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ آیا حد $\lim_{x \to -1} f_{(x)}$ موجود است؟ خیر



$\lim_{x \to (-1)^+} f_{(x)} = 2$

$\lim_{x \to (-1)^-} f_{(x)} = -1$

PAN

Scanned by CamScanner

1

مثال: $\lim_{x\to 2}(7+\sqrt{x-2})$ موجود است؟ بله و مساوی $\boxed{7}$

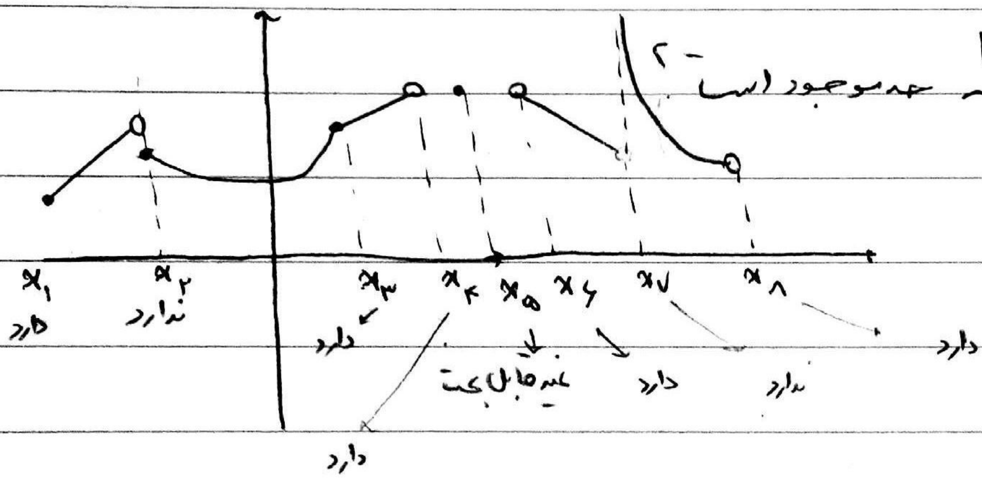
* اگر تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

" " " " چپ " " " " $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

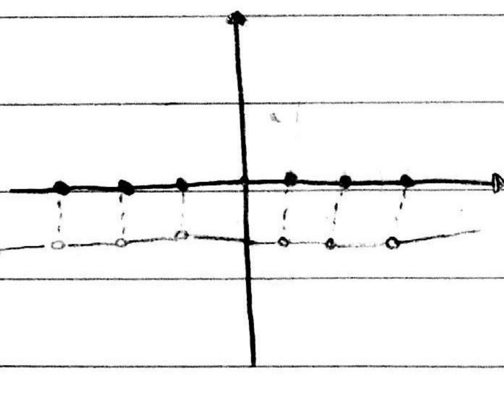
* مثال: $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{[x]-3}$ موجود است؟ حد این عبارت با حد چپ برابر است

$\frac{3+5}{-1} = \boxed{-8}$

مثال) در شکل زیر در کدام نقطه حد موجود است؟



* نمودار تابع $y=[x]+[-x]$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه نقاطی حد دارد.

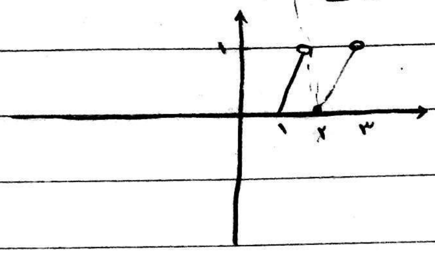


$\lim_{x\to a} f(x) = -1$

$a\in \mathbb{R}$

در بازه $(1 , 3]$

مثال) نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ را رسم کرده نشان دهید تابع در کدام نقطه حد ندارد؟



$1 \leq x < 2 \to [x] = 1 \to f(x) = x - 1$

$2 \leq x < 3 \to [x] = 2 \to f(x) = x - 2$

تابع فقط در $x = 2$ حد ندارد

در تابع
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & x > 1 \\ 2x + a & x < 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$
a و b را طوری حساب کنید $\lim_{x \to 1} f(x) = 6$

$a = 4 \quad b = -3 \qquad \lim_{x \to 1^+}(ax^2 + bx + 5) = 6 \to a + b = 1$

$\lim_{x \to 1^-}(2x + a) = 6 \to 2 + a = 6 \to x = 4$

مثال) در تابع $f(x) = 2[x] + (a+3)[x]$ مقدار a را طوری تعیین کنید $\lim_{x \to n} f(x) \; (n \in Z)$ موجود باشد؟

$\lim_{x \to n^+} F(x) = 2n + an + 3n \to 5n + an$

$\lim_{x \to n^-} f(x) = 2n - 2 + an - a + 3n - 3$

$\cancel{5n} + \cancel{an} = \cancel{5n} + \cancel{an} - a - 5$

$\boxed{a = -5}$ ✓

مثال) در تابع
$$f(x) = \begin{cases} a[x] + 3 & x > 2 \\ ax^2 + bx - 4 & x < 2 \end{cases}$$
حد راست ۵ حد چپ ۷

$\lim_{x \to 2^+}(a[x] + 3) = 2a + 3 = 5 \to 2a = 2 \to \boxed{a = 1}$ ✓

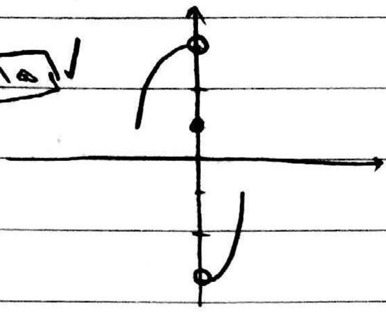
$\lim_{x \to 2^-}(ax^2 + bx - 4) = 4a + 2b - 4 = 7 \to b = \boxed{3.5}$ ✓

Date : ____________ Subject : ____________

با توجه به نمودار حاصل عبارت را بدست آورید

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) - 5\lim_{x\to 0^-} f(x) + 3f(0)$$

$$-3 - 15 + 3 = \boxed{-15}$$ ✓



اگر $f(x+3) = \dfrac{3x-4}{x+2}$ باشد $\lim_{x\to 2} f(x) = ?$

$t = x+3 \longrightarrow x = t-3$

$$\frac{3t-9-4}{t-1} \longrightarrow \frac{3t-13}{t-1} \longrightarrow \frac{3x-13}{x-1} \xrightarrow{x=2} \boxed{-7}$$ ✓

$$x+3 = 2 \longrightarrow x = -1 \longrightarrow \frac{-3-4}{-1+2} = \boxed{-7}$$ ✓✓

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}} [3x]$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}^+} [3x] = 1 \qquad \lim_{x\to \frac{1}{3}^-} [3x] = 0$$

حاصل را بدست آورید

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x+3}{x-1}\right] \xrightarrow{x\to 2^-} \left[\frac{4.9}{0.9}\right] = 5$$

$$\left[\frac{5.1}{1.1}\right] = 4$$

$x \to 2^+$

$$\lim_{x\to 2}[-2x+5] \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

PAN

Subject : ____________ Date : ____________

* در تابع $\lim_{x \to a} [f(x)]$ اگر $f(x)$ تابع اکیداً صعودی باشد آنگاه $\lim_{x \to a^+} [f(x)] = f(a)$

$$\lim_{x \to a^-} [f(x)] = f(a) - 1$$

و برای تابع اکیداً نزولی برعکس.

$$\lim_{x \to 1} [x^2 - 2x + 5] \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} [-x^2 + 6x - 11] \xrightarrow{-2} \lim_{x \to 3} [-(x^2 - 6x + 9) - 2] = [-(x-3)^2 - 2]$$

$$\boxed{= -3}$$

$-8{,}41 + 17{,}4$

قضایای حد: اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ آنگاه

(1) $\lim_{x \to a} ((f \pm g)(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$ حد مجموع برابر مجموع حدها
حد تفاضل برابر تفاضل حدها

(2) $\lim_{x \to a} ((f \times g)(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$ حد حاصلضرب برابر حاصلضرب حدها

(3) $\lim_{x \to a} \left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0$ حد تقسیم برابر حاصل تقسیم حدها

(4) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ اگر n زوج باشد آنگاه $L \geq 0$

(5) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = (L_1)^n$

PAN

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)} = \frac{1}{L_1} \ , \ L_1 \neq 0$$ (۷*

مثال)

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{\overset{\overset{-1}{\text{مطلق}}}{2-2=0}}{\underset{\text{حدی}}{0^+}} = 0$$

$$\lim_{x \to 4.5} \frac{x+5}{[x]+[-x]+1} = \frac{9.5}{\underset{\text{مطلق}}{0}} \longrightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{\underset{\text{حدی}}{0}} = \text{حد ندارد}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x-2} = \frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}} = \text{مبهم}$$

* برای رفع ابهام صفر تقسیم بر صفر، سه حالت وجود دارد : اگر صورت و مخرج کسر چند جمله ای باشند برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را تجزیه نموده، عامل مشترک را حذف می کنیم. (عامل ابهام کننده را حذف می کنیم)

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2+5x+2}{7x^2-6x-1} = \frac{0}{0} \ \text{مبهم} \longrightarrow \frac{\cancel{(x-1)}(3x-2)}{\cancel{(x-1)}(7x+1)} \longrightarrow \frac{3-2}{7+1} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

* این روش از تقسیم درجه ۲ به درجه ۲ درست است.

مثال)

$$\lim_{x \to -2} \frac{5x^2+7x-6}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x+2)}\overset{-10-3}{(5x-3)}}{\cancel{(x+2)}\underset{-4}{(x-2)}} = \boxed{\frac{13}{4}}$$

$$x^3-3x^2+4 \ \big| \ x-2 \quad\quad x^2-x-2$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{2x^2-5x+2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2-x-2)}{\cancel{(x-2)}(2x-1)} = \frac{\overset{\text{حدی}}{0}}{3} = 0$$

PAN

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^8-1}{x^{12}-1} = \frac{(x-1)(x^7+x^6+\dots+x+1)}{(x-1)(x^{11}+x^{10}+\dots+x+1)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{(x-1)} = 1+1+1+\dots+1 = n$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^4-16} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)}{\cancel{(x-2)}(x^3+2x^2+4x+8)} = \frac{16+16+16+16+16}{8+8+8+8} = \frac{80}{32} = \frac{5}{2} = \boxed{2.5}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5+3x-4}{x^7+5x-6} = \frac{(x^5-1)+(3x-2)}{(x^7-1)+(5x-5)} = \frac{(x-1)(x^4+x^3+\dots+x+1+3)}{(x-1)(x^6+x^5+\dots+x+1+5)} = \frac{2}{3}$$

۲ اگر مبهم $\frac{0}{0}$ از عبارت های لیمیت حاصل شود برای رفع ابهام اگر رادیکال در صورت بود، صورت کسر را، اگر در مخرج

و یا در هردو بود هردو را گویا می کنیم.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{3x^2-5x-2} \times \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \lim \frac{x+7-9}{\cancel{(x-2)}(3x+1)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{7\times 6} \to \boxed{\frac{1}{42}}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+2}+x} = \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x+2}+x} \times \frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{x+2}-x} = \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+2}-x)}{x+2-x^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)(\sqrt{x+2}-x)}{\cancel{(x+1)}(-x+2)} = -\frac{4}{3}$$

۱۰. $\sqrt[3]{x+5}-2 \quad (\sqrt[3]{x+5})^2 + 2\sqrt[3]{x+5}+4 \quad \times \quad \sqrt{x+6}+3 \quad (\cancel{x+5-8})(\sqrt{x+6}+3)$

Date : ____________ Subject : ____________

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)^2}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\lim\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\times\lim\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

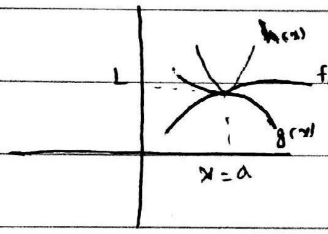
اگر $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2+ax+b}=5$ ، a و b را حساب کنید.

$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0 \rightarrow 1+a+b=0$

$\lim\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(x-b)}=\frac{1+4}{1-b}=5\rightarrow 5-5b=5\rightarrow b=0 \qquad a=-1$

قضیه فشردگی (ساندویچ): اگر در یک همسایگی a داشته باشیم $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ و $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$

آنگاه $\lim_{x\to a}f(x)=L$ است.



مثال) اگر $3-x^2\leq f(x)\leq 2+\cos^2 x$ باشد، $\lim_{x\to 0}f(x)$ را حساب کنید.

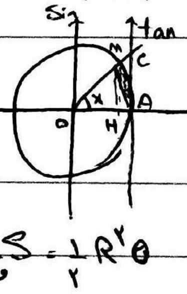
$3-0=3 \qquad 2+\cos^2 0=3 \qquad \lim_{x\to 0}f(x)=3$

مثال) اگر $|f(x)-2|\leq (x-3)^2$ باشد، $\lim_{x\to 3}f(x)$ را حساب کنید.

$-(x-3)^2\leq f(x)-2\leq (x-3)^2 \longrightarrow 2-(x-3)^2\leq f(x)\leq 2+(x-3)^2$

$\lim_{x\to 3}2-(x-3)^2=2 \qquad \lim_{x\to 3}2+(x-3)^2=2 \qquad \lim f(x)=2$

قضیه: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$



$\tan x=AC$
$\sin x=MH$

$S_{\Delta MOA}<S_{\text{قطاع } MOA}<S_{ACO}$

$\frac{1}{2}OA.MH<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}OA.AC$

$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

$\sin x<x<\tan x$

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\rightarrow \lim_{x\to 0}(1)=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

$\lim\frac{x}{\sin x}=\boxed{1}$

$S_{\text{قطاع}}=\frac{1}{2}R^2\theta$

PAN

Subject : ____________ Date : ____________

نکته:

$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$ ✓✓ $\qquad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to a}f(x)}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\frac{1}{\frac{x}{\sin x}}=\frac{1}{1}=1$ ✓

$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1}$ ✓ $\qquad \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1\times1=1$ ✓

$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1}$ ✓ $\qquad \lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ ✓

۳) برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع مثلثاتی علاوه بر دو روش قبلی از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$$

مثال) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\tan 5x}$

$$\lim\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{5x}{\tan 5x}\times\frac{7}{5}=1\times1\times\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$ ✓✓

مثال) $\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$ ✓✓

مثال) $\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)}\times(x+2)=1\times4=4$ ✓

مثال) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\times1=2$ ✓✓

مثال) $\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sqrt{2}\sin x}{x}=-\sqrt{2}$

مثال) $\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}-2\,\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{\sin x}{x}\times4=\boxed{-8}$

PAN

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2}$$

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim \frac{\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\cos x \cos\frac{\pi}{4}}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{(x-\frac{\pi}{4})(\cos x \cos\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} = \tan p - \tan q$ *

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \times \frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}} = \frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \times \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$

$\lim 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times 4\right)^2 = \boxed{8}$

$\lim \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{1-\cos x} = \frac{\lim 4(1-\cos x)(1+\cos x)\cos^2 x}{1-\cos x} = 4\times 2\times 1 = \boxed{8}$

پیوستگی: تابع f در $x=a$ پیوسته است اگر

الف) $a \in D_f$ ($f(a)$ موجود باشد) ب) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد

ج) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

مثال) آیا تابع $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ پیوسته است؟ (در $x=1$)

$D_f = R - \{1\}$ ← در مورد پیوستگی نمی‌توانیم صحبت کنیم

مثال) آیا تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است؟

$f(a) = f(1) = 3$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ $f(1) \neq \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

پیوسته نیست

Subject : Date :

مثال) پیوستگی تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x-1 & x>2 \\ x+1 & x<2 \\ 4 & x=2 \end{cases}$ در $x=2$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=3 \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=3 \quad f(2)=4 \quad 3\neq 4$

مثال) پیوستگی تابع $f(x)=x+[x]$ در $x=3$ بررسی کنید.

$f(3)=6$

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=6 \quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=5$ حد نداریم

پیوستگی راست داریم ← حد راست داریم

پیوستگی راست: تابع f در $x=a$ دارای پیوستگی راست می‌باشد اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

" چپ: " " " " " " چپ " " $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

مثال) تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x+a}-3}{x}$ مقدار $f(0)$ را طوری حساب کنید که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\times\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\boxed{\frac{1}{6}}$ ✓

مثال) تابع $f(x)=\begin{cases} a[x]+3 & x>-1 \\ \frac{|x+1|}{x+1}+2b & x<-1 \\ 3x+5 & x=-1 \end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته باشد a و b را حساب کنید.

$f(-1)=2 \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=-a+3=2 \to a=1$ ✓

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{-(x+1)}{x+1}+2b=-1+2b \to b=\frac{3}{2}$ ✓

پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$D_f=x\leq 1 \quad \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\sqrt{1-1}=0$

$f(1)=0$ ← پیوستگی داریم

PAN

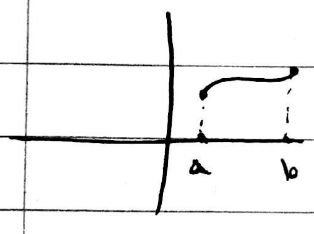
مثال) مقدار a را طوری حساب کنید که $f(x)=\begin{cases} a|x|+1 & x\ge 1 \\ x^2+2ax+2 & x<1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد.

$f(1)=a+1=\lim_{x\to1^+}f(x)$ $\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=3+2a$ $\quad 3+2a=a+1 \to \boxed{a=-2}$

مثال) پیوستگی در $x=2$ $\quad f(x)\begin{cases} a[x]+1 & x\ge2\\ \frac{|x-2|}{x-2} & x<2\end{cases}$

$f(2)=2a+1=\lim_{x\to2^+}f(x)$ $\quad \lim_{x\to2^-}f(x)=-1$ $\quad 2a+1=-1\to 2a=-2\to\boxed{a=-1}$

پیوستگی در یک بازه: تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته است اگر در تمام نقاط بازه باز (a,b) پیوسته باشد در $x=a$ پیوستگی راست و در تابع $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.



تابع f با ضابطه $f(x)=x[x]$ در بازه $[2,3]$ پیوسته است؟

$2\le x<3 \Rightarrow [x]=2 \to f(x)=2x$ $\quad x=3 \to f(3)=9$ $\quad f(x)\begin{cases}2x & 2\le x<3\\ 9 & x=3\end{cases}$

$f(3)=9$ $\quad \lim_{x\to3^-}f(x)=2\times3=\boxed{6}$

تابع f با ضابطه $f(x)\begin{cases}x+1 & 0\le x<1\\ 3x-1 & 1\le x<2\\ 2x+1 & 2\le x\le3\end{cases}$ در بازه $[0,3]$ پیوسته است؟

$f(1)=2=\lim_{x\to1^+}f(x)$ $\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$ $\quad x=1$ پیوسته

$f(2)=5$ $\quad \lim_{x\to2^+}f(x)=5$ $\quad \lim_{x\to2^-}f(x)=5$ $\quad x=2$ پیوسته

پیوسته است